TD 2 : LOGARITHME, FORMULE DE CAUCHY ET PREMIÈRES CONSÉQUENCES

Exercices : à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices : seront traités en classe en priorité.
Exercices : plus difficiles.

Exercice 1: (pour la semaine du 12 février)

On note log la détermination du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$ telle que $\log 1 = 0$.

1. A-t'on $\log(zz') = \log(z) + \log(z')$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$ tels que $zz' \in \mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$?
2. A-t'on $\log(1/z) = -\log z$ pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$?

Exercice 2: Montrer que :

$$f(z) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

est une fonction holomorphe sur $U = \mathbb{C}\setminus\{it | t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$. Calculer $f(t)$ lorsque $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3: Montrer qu'il existe exactement deux fonctions holomorphes f sur $U = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z) < 1\}$ telles que $f(z)^2 = z^2 - 1$ pour tout $z \in U$.

Exercice 4:

Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2-z}$ n'a pas de primitive holomorphe que $D(0,1)\setminus\{0\}$.

Exercice 5:

Soit $D = D(0,1)$, $0 < r < 1$. Soit $f \in H(D)$, bornée par $M > 0$ sur le cercle $|z| = r$ et s'annulant en au moins un point $a \in D(0,r)$. Montrer que

$$|f(0)| \leq \frac{M|a|}{r-|a|}.$$

Exercice 6:

Soit $D = D(0,1)$. Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence au moins 1. On suppose que :

$$\forall z \in D, |f(z)|(1-|z|) \leq 1.$$

Montrer que :

$$|a_n| \leq (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e(n+1).$$

Exercice 7:

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t - t}{t^3} dt$.

Pour ce faire,on considère la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{e^{iz}-1-iz}{z^3}$, et, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note γ_r le demi-cercle de diamètre $[-r,r]$ situé dans le demi-plan $\{\mathrm{Im} z > 0\}$ et parcouru dans le sens direct. Enfin, on considère $\epsilon, R > 0$ tels que $\epsilon < R$.

1. Écrire une relation entre les quatre intégrales suivantes :

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz, \quad \int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz, \quad \int_{-R}^{-\epsilon} f(t)dt, \quad \int_\epsilon^R f(t)dt.$$

2. Calculer $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz$ et $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz$.

3. Conclure.

Exercice 8:

1. En intégrant $z \mapsto e^{-z^2}$ sur le secteur angulaire délimité par les segments $[0, R]$ et $[0, Re^{i\pi/4}]$ $(R > 0)$, calculer les intégrales

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx \ \text{ et } \int_0^\infty \cos(x^2)dx.$$

2. Soit a un réel strictement positif. Calculer

$$\int_0^\infty \exp(-x^2)\cos(ax)dx$$

en intégrant une fonction bien choisie sur le rectangle de sommets $\{\pm R, \pm R + ia/2\}$, $R > 0$.

Exercice 9: En utilisant le morceau de couronne délimité par deux demi-cercles centrés en 0, calculer

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix} - 1}{x} dx$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Exercice 10: (pour la semaine du 19 février)

En intégrant $z \mapsto \frac{\log z}{1-z}$ sur le bord de $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1, |z| \geq \epsilon\}$, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt.$$

Exercice 11: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$. On note $h(z) = z^{2n}P(z + z^{-1})\bar{P}(z + z^{-1})$ ($\bar{P}$ est le polynôme obtenu en conjuguant les coefficients de P). On suppose par l'absurde que P est sans racine. En considérant l'intégrale

$$\frac{1}{i}\int_S \frac{\zeta^{2n-1}}{h(\zeta)} d\zeta,$$

aboutir à une contradiction. Une preuve de plus du "théorème fondamental de l'algèbre" !

Exercice 12: Soit f une fonction continue sur $\bar{D}(0,1)$, holomorphe sur $D(0,1)$. On suppose que les coefficients dans le développement en série entière de f en 0 sont tous des entiers. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 13: (pour la semaine du 19 février)

1. Soit $D \geq 0$. Montrer un analogue du théorème de Liouville pour les fonctions qui sont $\mathcal{O}(|z|^D)$ quand $|z| \to \infty$.

2. Soit f une fonction entière. Montrer que si $|f| \to \infty$ quand $|z| \to \infty$, alors f est un polynôme.

Exercice 14: Soient f et g deux fonctions entières telles que $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda g$.

Exercice 15: ✍

On note S l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Un *point singulier* de f est un élément $z \in S$ tel que la fonction f ne s'étende pas en une fonction holomorphe sur un voisinage de z. On note $\mathscr{S}(f)$ l'ensemble des points singuliers de f et $\mathscr{R}(f) = S \backslash \mathscr{S}(f)$.

1. Montrer que $\mathscr{S}(f)$ est un fermé non vide de S.
2. Un premier exemple : on suppose que $a_n \geq 0$ pour tout n. Montrer que $1 \in \mathscr{S}(f)$. Donner un exemple de telle série avec $\mathscr{S}(f) = \{1\}$.
3. Un deuxième exemple : montrer que si $f(z) = \sum a_n z^{n!}$ est une série entière de rayon de convergence 1 avec $a_n \geq 0$ pour tout n, $\mathscr{S}(f) = S$.
4. Un troisième exemple : pour chaque $z_0 \in S$ trouver f telle que $\mathscr{S}(f) = \{z_0\}$.
5. Soient $\lambda > 0$ un entier et $(p_n)_n$ une suite d'entiers positifs vérifiant
$$\forall n,\ \lambda p_{n+1} > (\lambda+1) p_n.$$
Supposons que $a_k = 0$ dès qu'il existe n tel que $p_n < k < p_{n+1}$.
   (a) On note $\varphi(z) = \frac{1}{2}(z^\lambda + z^{\lambda+1})$. Montrer que, si $1 \in \mathscr{R}(f)$, alors le rayon de convergence de la série de Taylor de $f \circ \varphi$ en l'origine est strictement plus grand que 1.
   (b) En déduire que $1 \notin \mathscr{R}(f)$.
6. Soit $c > 1$ un réel, et $(p_n)_n$ une suite d'entiers vérifiant
$$\forall n,\ p_{n+1} \geq c p_n.$$
On suppose que $a_k = 0$ dès qu'il existe n tel que $p_n < k < p_{n+1}$. Montrer que $\mathscr{S}(f) = S$.
7. *Exemple.* Montrer que la série
$$f(z) = 1 + 2z + \sum_{k \geq 1} 2^{-k^2} z^{2^k}$$
définit une fonction injective et continue sur le disque unité fermé, holomorphe sur le disque ouvert, infiniment différentiable en tout point de S mais ne se prolonge holomorphiquement en aucun point de S.
Les deux questions précédentes sont intéressantes car elles montrent que contrairement à ce que suggère l'intuition, la lacunarité et la continuité au bord n'excluent pas la présence de singularités.
8. (Si vous avez fait l'exercice 9 du TD 1) Montrer qu'en général on n'a ni $E(f) \subset \mathscr{R}(f)$, ni $\mathscr{R}(f) \subset E(f)$.
Toutefois, un théorème de Fatou affirme que si l'on suppose $a_n \to 0$, alors $\mathscr{R}(f) \subset E(f)$. En particulier on voit que pour l'exemple de Luzin de l'exercice 9 du TD 1, tous les points du cercle sont singuliers.

Exercice 16:

1. Soit U un domaine borné de $\mathbb{C}$, $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ continue, holomorphe en restriction à U. Soit $a \in U$ tel que $s := \min_{z \in \partial U} |f(z) - f(a)| > 0$. Montrer que $f(U)$ contient $D(f(a), s)$.
2. On considère le cas $U = D(0, r)$ et on suppose que f est non constante, holomorphe sur un voisinage de U (f satisfait donc en particulier aux hypothèses de la question précédente) et vérifie $||f'||_U \leq 2|f'(0)|$. Montrer que $D(f(0), R) \subset f(U)$, avec $R := (3 - 2\sqrt{2}) r |f'(0)|$. On pourra écrire $f(z) - f(0) - f'(0)z = \int_{[0,z]} (f'(\zeta) - f'(0)) d\zeta$ et appliquer la formule de Cauchy à l'intégrande.
3. Soit f une fonction holomorphe non constante sur un voisinage du disque unité D. Montrer que la fonction continue $z \mapsto |f'(z)|(1 - |z|)$ sur $\bar{D}$ atteint son maximum en un point $p \in D$ et que $|f'(z)| \leq 2|f'(p)|$ si $z \in D(p, (1 - |p|)/2)$.
4. Sous les hypothèses de la question précédente montrer que
$$D(f(p), (\frac{3}{2} - \sqrt{2})|f'(0)|) \subset f(D).$$
En déduire que l'image d'une fonction entière contient des disques de rayon arbitrairement grand.